Hoermander　多変数複素解析を読む　講義報告[1]

２００９年1月２４日（土）１４：００〜１６：００

前期のテーマであった多重調和関数についての復習をし、関連する練習問題を解いた。最後に、様々な擬凸性の定義を行なった。。

1　擬凸性

1.1　多重調和関数についての復習

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を開集合とするとき、

1. $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ が**多重劣調和**であるとは、$\forall \vec{z} \in \Omega,\ \forall \vec{w} \in \mathbb{C}^n$ に対して、

$$u \circ \phi_{\vec{w}} : \phi_{\vec{w}}^{-1}(\Omega) \to [-\infty, \infty) \text{ が劣調和になることである。}$$

ただし、$\phi_{\vec{w}}(\tau) = \vec{z} + \tau \vec{w}\ (\tau \in \mathbb{C})$ とする。Ω で多重劣調和な関数全体の集合を $P(\Omega)$ と記す。

   (a) $u \in C^2(\Omega)$ のとき、$u \in P(\Omega)$ となるための必要十分条件は、

$$L(u)(\vec{w}) = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} w_j \overline{w}_k \geq 0 \quad \text{for } \forall \vec{z} \in \Omega,\ \vec{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n$$

   を満たすことである。特に、$L(u)(\vec{w}) > 0$ であるとき、$u \in C^2(\Omega)$ を**強多重劣調和**という。

   (b) $\forall z_0 \in \Omega,\ \Delta(z_0, \vec{r}) \subset \Omega$ に対して、

$$u(z_0) \leq \frac{1}{(\pi r_1^2)(\pi r_2^2)\cdots(\pi r_n^2)} \int_{\Delta(z_0, \vec{r})} u(\xi) dV(\xi)$$

   を満たす。

   (c) $u \in P(\Omega),\ u(z) \not\equiv -\infty$ であれば、u は Ω 上局所可積分である。

2. $u, v \in P(\Omega),\ \alpha > 0$ に対して、$\alpha u,\ u + v,\ \max(u, v) \in P(\Omega)$

3. (a) $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset P(\Omega)$ が $u_\nu \downarrow u\ (\nu \to \infty)$ を満たすならば、$u \in P(\Omega)$

   (b) $u_\nu \to u\ (\mu \to \infty)$ が Ω でコンパクト一様収束で、$u_\nu \in P(\Omega)\ (\mu \in \mathbb{N})$,　$u(\vec{z}) \not\equiv -\infty$ for $\forall \vec{z} \in \Omega$ ならば、$u \in P(\Omega)$

4. $\rho \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ は、$\rho \geq 0,\ supp\ \rho \subset [0, 1]$ を満たし、かつ、

$$2\pi \int_0^1 \rho(x) dx = 1$$

とする。$\varepsilon > 0$ に対して、

$$\rho_\varepsilon(\vec{z}) = \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \rho\left(\frac{|z_1|}{\varepsilon}\right) \rho\left(\frac{|z_2|}{\varepsilon}\right) \cdots \rho\left(\frac{|z_n|}{\varepsilon}\right) \quad \text{for} \quad \forall \vec{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$$

[1] 数学工房　http://www.sugakukobo.com/

とおくと、$\rho_\varepsilon \geq 0,\ supp\ \rho_\varepsilon \subset \Delta(0,\varepsilon)$ でかつ、

$$\int_{\mathbb{C}^n} \rho_\varepsilon(\vec{\boldsymbol{x}})dV(\vec{\boldsymbol{x}}) = 1$$

を満たす。このとき、$u \in P(\Omega_\varepsilon) \cap C^\infty(\Omega)$ に対して、

$$u * \rho_\varepsilon \searrow u \quad (\varepsilon \downarrow 0) \quad \text{in } \Omega$$

が成立する。ただし、$u * \rho_\varepsilon$ は u と ρ_ε の合成積、すなわち

$$(u * \rho_\varepsilon)(\vec{\boldsymbol{z}}) = \int_{\mathbb{C}^n} u(\vec{\boldsymbol{w}})\rho_\varepsilon(\vec{\boldsymbol{z}} - \vec{\boldsymbol{w}})dV(\vec{\boldsymbol{w}})$$

5. f を $\mathbb{C}^n$ の開集合 Ω から $\mathbb{C}^m$ の開集合 D への正則写像とするとき、任意の $u \in P(D)$ に対して、$u \circ f = f^*(u) : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ は Ω で多重劣調和である。

6. 実数値超関数 $T \in \mathfrak{D}(\Omega)$ が $u \in P(\Omega)$ により与えられる超関数に等しい必要十分条件は、$\varphi \geq 0$ なる任意の $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega, \mathbb{R})$ に対して、

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 T}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(\varphi) w_j \overline{w}_k \geq 0 \quad \text{for } \forall \vec{\boldsymbol{w}} = (w_1, w_2, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n$$

が成立することである。

練習問題 1.1.

1. $f \in \mathcal{A}(\Omega),\ f \not\equiv 0$ であれば、$|f|,\ \log|f| \in P(\Omega)$ であることを示せ。

2. $f \in P(\Omega)$ であれば、$\exp \circ f \in P(\Omega)$ であることを示せ。

定義 1.1 ($p-$ 凸). $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を開集合とする。 K が Ω のコンパクト集合とするとき、
K の**正則包**とは、

$$\hat{K}_\Omega = \bigcap_{f \in \mathcal{A}(\Omega)} \left\{ \vec{\boldsymbol{z}} \in \Omega \mid |f(\vec{\boldsymbol{z}})| \leq \sup_K |f| \right\}$$

K の $p-$ **凸包**とは、

$$\tilde{K}_\Omega = \bigcap_{u \in \P(\Omega)} \left\{ \vec{\boldsymbol{z}} \in \Omega \mid |u(\vec{\boldsymbol{z}})| \leq \sup_K |u| \right\}$$

で定義される。

練習問題 1.2. $K \subset \tilde{K}_\Omega \subset \hat{K}_\Omega \subset \Omega$ であることを確かめよ。

1.2 様々な擬凸性

以下、$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を開集合とする。

定義 1.2 (D-擬凸). Ω が ***D*-擬凸**であるとは、関数

$$\delta : \Omega \ni \vec{z} \to -\log(d_{\partial\Omega}(\vec{z})) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

が多重劣調和であることを言う。

定義 1.3 (L-擬凸（Lelong 擬凸）). Ω が ***L*-擬凸（*Lelong* 擬凸）**であるとは、$u \in C(\Omega) \cap P(\Omega)$ が存在して、任意の $r \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\Omega_{(u,r)} = \{z \in \Omega \mid u(z) < r\} \subset\subset \Omega$$

が成立することである。

定義 1.4 (強擬凸). $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ が領域の時、**強擬凸**であるとは、Ω を含む領域 G が存在して次の性質をもつことを言う。

1. $\overline{\Omega} \subset G$
2. $v \in C^\infty(G) \cap P(\Omega)$ なる v が存在して、$\tilde{\Omega} = \{z \in G \mid v(z) < 0\}$ の一つの連結成分として Ω が表示されている。

Ω が強擬凸単調増加領域列 $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ により、$\Omega_n \downarrow \Omega$ $(n \to \infty)$ とできるとき、Ω を ***G*-擬凸（*Grauert* 擬凸）**と言う。

定義 1.5 (P-擬凸). Ω が ***P*-擬凸**であるとは、任意の Ω 内のコンパクト集合 K に対して、$\tilde{K} \subset\subset \Omega$ が成立することを言う。

定義 1.6 (解析的円板族). U を $\Delta^-(0,r)$ の開近傍とし、定義写像 $f : [0,1] \times U \to \mathbb{C}^n$ は連続で、
$\mathrm{f}_\lambda(t) = f(\lambda, t)$ $(\lambda, t) \in [0,1] \times U$ とおいたとき、各 $\lambda \in [0,1]$ を固定すると、$f_\lambda \in \mathcal{A}(\Delta^-(0,r), \mathbb{C}^n)$ を満たすものとする。この f_λ に対して、

$$D(\lambda) = \{f(\lambda, t) \in \mathbb{C}^n \mid |t| \le r\}$$

とするとき、$\{D(\lambda)\}_{\lambda\in[0,1]}$ を**解析的円板族**と言う。このとき、$D, \delta(D)$ を

$$D = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} D(\lambda), \quad \delta(D) = \{f(\lambda, t) \in \mathbb{C}^n \mid |t| = r\}$$

とおく。

定義 1.7 (Oka-擬凸). Ω が ***Oka*-擬凸**であるとは、Ω の解析的円板族 $\{D(\lambda)\}_{\lambda\in[0,1]}$ が $D(0) \cup \delta(D) \subset\subset \Omega$ を満たすならば、$D \subset\subset \Omega$ が成立する性質をもつことを言う。

記録　by　J.S